Zadání druhé série

Termín odevzdání: 30. listopadu

Fotbalisté týmu Antarktidy pokračovali na x-tém mistrovství světa ve fotbale osmifinálovým zápasem proti Řecku. Trenér Proton se rozhodl zamíchat sestavou, aby si zahráli čerství hráči. Na hřiště se tak dostali například Soběslav Sodík, Antonín Antimon či Chudoš Chlor.

Úloha 0. *Jaké číslo měl na dresu Chudoš Chlor?*

Všichni byli před zápasem netrpěliví. Již od časného rána se stadion plnil miliony fanoušků a fanynek, kteří podporovali tým Slávka Uhlíka. Tribuny stadionu ovšem neměly neomezenou kapacitu, a tak po nějaké době došlo k jejich naplnění, tudíž organizátoři potřebovali sehnat další místa k sezení. Postavili proto novou tribunu podle následujícího plánu, kde čísla představují počty diváků v jednotlivých sektorech.

Úloha 1. *Mřížka se skládá z šedých polí. Tři pole nahoře, dole, napravo i nalevo vždy splňují rovnici, znaménka a rovnítka jsou napsaná mezi políčky. Mezi čtyřmi šedými políčky je vždy napsaný součet těchto čtyř polí. Doplňte chybějící čísla do mřížky.*

	×		=	42
+		29		−
15	39	11	105	
∥		75	57	∥
	÷	3	=	

Pozn.: U této úlohy není potřeba uvádět postup řešení.

Nakonec se díky schopnostem organizátorů podařilo zajistit místa pro téměř všechny fanynky a fanoušky. Jedno místo ale pořád scházelo. Pořadatelé nechtěli zkazit dobré jméno soutěže, které už bylo dost pošpiněno jejich neschopností rozsvítit světla na minulém zápase, a tak se snažili ještě jedno místo najít. Nakonec fanouška usadili na střídačku týmu Řecka vedle hráčů. Fotbalisté tím byli značně znepokojeni, jelikož hlasitým chrápáním rušil jejich týmovou poradu. Protest ale u rozhodčího neuspěl, a tak raději pokračovali v debatě. Jejich trenér Zeus jim právě do tabulky vyplňoval, které hráče mají faulovat.

Úloha 2. *Vybarvěte některá políčka následující tabulky černou barvou tak, aby byla splněna následující pravidla:*

- *Všechna černá políčka musí být propojena stranami (horizontálně nebo vertikálně) do jednoho souvislého útvaru.*
- *Černá políčka nesmí nikde v mřížce vytvořit plný čtverec o velikosti* 2×2.
- *Čísla v očíslovaných buňkách určují délky souvislých černých bloků v jejich bezprostředním sousedství (v osmi okolních políčkách).*
- *Pokud políčko obsahuje více čísel (nezáleží na jejich pořadí), znamená to, že se v jeho sousedství nachází více samostatných černých bloků (např. dvě čísla znamenají dva bloky). Mezi každými dvěma černými bloky musí být v sousedství daného políčka alespoň jedno bílé políčko.*
- *Políčka s čísly se nikdy nevybarvují, vždy zůstávají bílá.*

Příklad:

		3	1 2		
1 3					5
	7			3 3	
	5			4	

Příklad (jediného) řešení:

■	■	3	1 2	■	■
1 3	■	■		■	5
■		■	■	■	■
■	7	■		3 3	
■	■	■	■	■	■
■	5	■		4	■

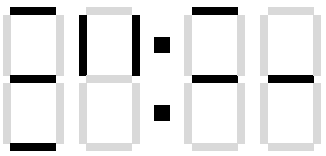
Vaše zadání:

	1 2	2							1 3					
					7	3 3				1 1 3				4
									1 2 2		1 3			3
		2 2				1 3								
	1 1 2					1 1								
1 3		1 2 2					2 4						7	
										1 3	1 5		3 3	
					7				6					
	3 3		1 1 3	1 1 1										
	3 3						2 4					1 2 2		1 3
								1 1 2					1 1 3	
								1 5				7		
2			6		1 2 2									
2				1 1 2				3 3	2 4					
					1 3							1 1	3	

Pozn.: U této úlohy není potřeba uvádět postup řešení.

Ještě před začátkem zápasu šel pro jistotu trenér Proton za rozhodčím. Po zkušenostech z předchozího zápasu si chtěl ověřit, že jeho hodinky fungují správně. Rozhodčí byl velmi přátelský a povyprávěl mu, jakou měl včera příhodu s hodinkami.

Úloha 3. *Rozhodčí si čistil zuby, zatímco uviděl v zrcadle digitální hodiny za sebou. Protože bylo zrcadlo zašpiněné, viděl v něm pouze:*



Po vyčištění zrcadla viděl nejprve jeden smysluplný čas, na který si ihned nastavil své analogové hodinky. Poté si ale uvědomil, že tento čas byl pouhým odrazem správného času v zrcadle, a své analogové hodinky si tedy přenastavil na čas nový, taktéž smysluplný. Jaký čas mohl být na konci na rozhodčího hodinkách?

Když byl Proton ujištěný, že rozhodčího hodinky jdou správně, mohl zápas konečně začít. Bohužel se touto debatou začátek značně natáhl a někteří diváci naštvaně pískali. Po úvodním výkopu se ale situace uklidnila. Řekové byli mnohem těžším soupeřem než Římané. Slávek Uhlík a jeho spoluhráči se vůbec nedostávali do šancí a jejich brankář Hugo Hafnium měl spoustu těžkých zákroků. Hbitý útočník Achilles se propletl mezi hráči a obránci Sodík a Chlor zůstali stát jako solný sloup. Vystřelil na branku a míč skončil v síti. Řečtí fotbalisté se začali radovat a fanoušci týmu Antarktidy je vypískali.

Chvíli nato byl konec prvního poločasu s nepříznivým skóre 0:1. Trenér Proton věděl, že musí dojít k nějaké změně, jestli chtějí zápas vyhrát. Rozhodl se proto některé hráče vystřídat.

Úloha 4. *Proton má na tabuli napsaná čísla hráčů:* $1, 2, 3, \ldots, 20$. *V jednom tahu vybere dvě čísla a, b a místo nich napíše číslo $a + b - 1$. Takto pokračuje, dokud nezůstane číslo jediné. Jaké číslo to může být? Dokažte.*

Trenér musel během přestávky řešit také organizační záležitosti. Pokud by se jim povedlo zápas otočit, čtvrtfinále by hráli již další den. To se ovšem hrálo v úplně jiném městě. Potřeboval proto spočítat, jestli stihnou autobus.

Úloha 5. *Autobus vyjíždí z bodu A konstantní rychlostí. Jede rovně po nekonečné ploše. Najděte množinu bodů, ze kterých je možné dostihnout autobus na jeho cestě, jestliže vyrazíte ve stejnou dobu a stejnou rychlostí jako on.*

Hráči týmu Antarktidy nastoupili do druhého poločasu s několika čerstvými silami na hřišti. Přesto se jim stále nedařilo nebezpečněji ohrozit soupeřovu branku. Slávek Uhlík se chopil míče, ale dostal se pouze na středovou čáru, odkud vyslal střelu na branku soupeře. Brankář Pythagoras si spočítal její trajektorii a míč jednoduše chytil. Řekové nadále nebezpečně útočili na soupeře a tlačili je před sebou. Nakonec se jim povedlo zamknout všechny hráče týmu Antarktidy v jejich pokutovém území. Aby zámek odemkli, potřebovali zjistit čtyřmístný kód.

Úloha 6. *Hledáme čtyřmístný kód $\overline{ABCD}$, kde A, B, C, D jsou číslice. Víme o něm následující informace:*

- *Trojnásobek dvojciferného čísla $\overline{BC}$ je roven dvojcifernému číslu $\overline{AB}$.*
- *Celé čtyřciferné číslo $\overline{ABCD}$ je liché.*
- *Součet číslic $B + C$ je beze zbytku dělitelný číslicí D, přičemž $D \neq 1$.*

Jaký je tento čtyřmístný kód?

Albert Einsteinium rychle zjistil kód, takže ubránili velký tlak soupeře a mohli přejít do protiútoku. Po přihrávce z levé strany si nešikovný obránce Sisyfos kopl míč za brankovou čáru. Hráči Antarktidy se začali radovat, zatímco řecký trenér Zeus zahřměl: „Jako trest za tento vlastní gól budeš až do konce věků kutálet fotbalový míč do kopce!“.

Slávek Uhlík věděl, že teď je momentum na jejich straně, a pokračoval v útoku. Po skvělé přihrávce od Antimona se dostal sám před brankáře, ale ten jeho střelu vyrazil na roh. Hráči se nahrnuli do vápna a Uhlík se odebral k rohovému praporku. Položil míč na rohový praporek, natáhnul ho až po zem jako pružinu a pak ho pustil. Tento způsob zahrání rohu byl velmi neobvyklý a fotbalisté Řecka to vůbec nečekali. Míč vyletěl vysoko nad hřiště a nakonec spadl do branky. Hráči na střídačce propukli v obrovský jásot a vtrhli na hřiště. Fanoušci a fanynky volali Uhlíkovo jméno. Řekové ovšem protestovali, že způsob, kterým Slávek Uhlík zahrál rohový kop, byl proti pravidlům. Rozhodčí si vytáhl tlustou knihu pravidel, celou ji dvakrát přečetl, ale nikde nenašel ani zmínku o tom, že by to mělo být nelegální. Mezitím už dávno uplynula časomíra, takže byl vyhlášen konec zápasu, v němž Antarktida porazila Řecko 2:1. Euklides, který seděl na střídačce řeckého týmu, ani nezpozoroval, že už zápas skončil, jelikož počítal úlohu s prvočísly.

Úloha 7. *Nechť a je nenulové celé číslo. Předpokládejme, že a není dělitelné deseti. Dokažte, že $a^{2026} + 1$ i $a^{2026} + 9$ nikdy nemůžou být zároveň prvočísla.*

Uhlík a spol. ale neměli čas se radovat. Tím, že rozhodčí dvakrát četl celou knihu pravidel, se zápas dost natáhl a teď hrozilo, že nestihnou autobus, který jim Proton objednal. Nakonec se jim naštěstí povedlo autobus doběhnout. Tím jeli celou noc a hned další den měli hrát čtvrfinálový zápas.

POKRAČOVÁNÍ V PŘÍŠTÍ SÉRII