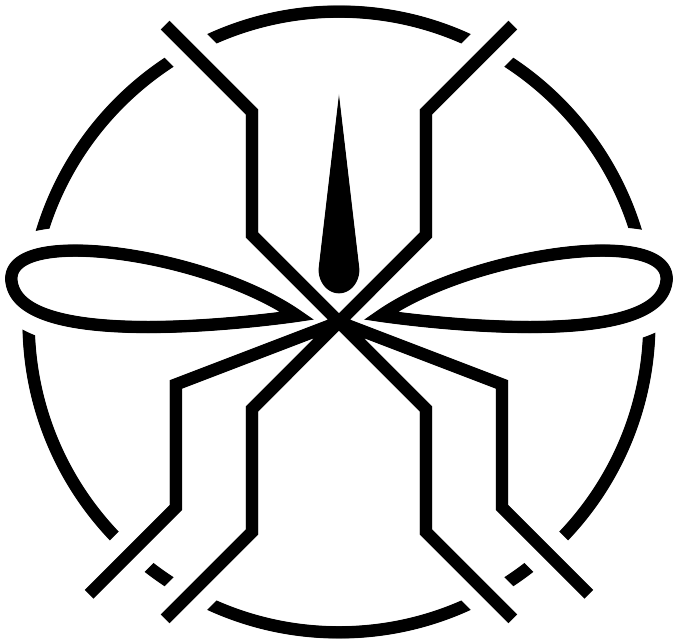


KoMáR – 15. ročník
2026/2027
1. série

Ahoj!

Baví tě matematika? Máš rád/a řešení problémů, u kterých musíš použít hlavu? Díváš se na SPZ aut a všímáš si těch, které jsou dělitelné devíti?

Pokud byla alespoň jedna z odpovědí ano a ty sám/sama jsi ještě na základní škole (nebo v odpovídajícím ročníku víceletého gymnázia), pak je KoMáR určitě skvělý způsob, jak trávit nějaký ten volný čas. Při řešení získáš skvělou praxi, a pokud budeš úspěšný/á, rozhodně tě neminou hezké ceny. Navíc, když s námi pojedeš na soustředění, můžeš potkat spoustu zajímavých lidí, zahrát si parádní hry a dozvědět se i něco zajímavého z matematiky. Máš chuť to zkusit? Tak do toho!

Chystané **podzimní soustředění** se bude konat o víkendu 16.–18. 10. a přihlašování spustíme na našich stránkách už 1. září. Tak si termín poznač v kalendáři a přijeď. Moc se na Tebe těšíme!

Řešení je možné odevzdávat pouze online, prostřednictvím našich webových stránek (***komar.math.muni.cz/upload.php***), a to buď zpracované v textovém editoru, nebo psané ručně a oskenované. Každou úlohu je nutné odevzdat zvlášť, nadepsanou jménem, příjmením a číslem úlohy. Úlohy je možné odevzdávat ve formátu PDF, nebo jako obrázek (PNG, JPG, JPEG). Až tvoje úlohy opravíme, pošleme ti zprávu emailem. Pro odevzdávání řešení je nutné se na našich stránkách zaregistrovat, a to i pokud jsi řešil/a KoMáRa už loni.

Další informace nalezneš na našich stránkách ***komar.math.muni.cz***. Mimo jiné se tam nachází emaily organizátorů, na které se můžeš obracet s případnými dotazy ohledně semináře.

Hodně štěstí nejen při řešení KoMáRa přejí Matouš, Tobík, Ashok, Zuzka, Týnka, Petr, Arne, Michal, Olaf, Mira, Emma, Klaudie a Taia.

Náš web:

komar.math.muni.cz

Náš instagram:

instagram.com/komar.math.muni

Jak řešit

V každé sérii je osm příkladů, cílem však není vyřešit všechny, proto neváhejte poslat byť i jediné řešení nebo jeho nástin. Úlohy řešte samostatně, opisování či využití AI je přísně zakázáno. Abyste za svá odevzdaná řešení obdrželi co možná nejvíce bodů, je potřeba nejen úlohu vyřešit, ale zejména svá řešení správně a srozumitelně sepsat. Protože víme, že mnozí z vás se s podobnými úlohami setkávají poprvé a zformulovat dobře svá řešení není jednoduché, shrnuli jsme pro vás to nejdůležitější, co je potřeba před odevzdáváním úloh vědět.

Vaším cílem je vždy zodpovědět otázku ze zadání. Většinou však pouze výsledek nestačí, je potřeba dokázat, že máte pravdu a že jste našli všechna řešení. Opravující z vašeho řešení musí pochopit logické úvahy, které k výsledku vedly; pokud odevzdáte pouze změť rovnic, aniž byste vysvětlili, jak jste k nim došli, nedostanete plný počet bodů. Zároveň i pokud vaše řešení nebude kompletně správně, můžete získat body díky některým důležitým myšlenkám, které by k řešení vedly. Nebojte se tedy odevzdat třeba i jen náznak řešení, pokud nevíte, jak dál.

Můžete se setkat s různými druhy příkladů a ke každému z nich je potřeba přistupovat trošku jinak:

- **Kolik... / vypočítejte obsah... / zjistěte poloměr...**
  Většina úloh po vás bude chtít jako výsledek nějaké číslo. V takovém případě je potřeba jej najít, ale také dokázat, že jste nalezli řešení všechna a žádné jiné číslo řešením být nemůže. Toho lze docílit dvěma způsoby. Nejčastěji se setkáme s tím, že pomocí logických úvah dojdeme k podmínkám, které pro naše řešení musejí platit. To mohou být rovnice, nerovnice nebo třeba podmínka, že námi hledané číslo je prvočíslo. Na jejich základě pak najdeme všechna řešení a můžeme mít jistotu, že jsme na žádné nezapomněli. Dalším způsobem, jak takovou úlohu vyřešit, je řešení odhadnout a potom dokázat, že je jediné. To ovšem bývá komplikovanější a ve většině případů se něco takového dokazuje složitě.

- **Vyplňte tabulku... / vyřešte hlavolam... / doplňte...**
  Úloha číslo jedna typicky bývá nějakým logickým hlavolamem, jako je třeba sudoku. Pokud si úloha žádá pouze vyplnění tabulky podle určitého pravidla, stačí takové vyplnění najít, nemusíte každý krok popisovat a vysvětlovat.

- **Dokažte... / ukažte, zda platí...**
  U takových úloh je potřeba logickými kroky dokázat platnost nějakého tvrzení, popřípadě ji vyvrátit. Pokud chcete ukázat, že nějaké tvrzení není pravdivé, stačí najít protipříklad. Naopak to ovšem neplatí. Nestačí vyzkoušet velké množství možností a prohlásit, že jelikož pro ně tvrzení platí, bude platit vždycky.
  Nejzákladnější metodou, jak něco dokázat, je takzvaný přímý důkaz. V takovém případě vycházíme z nějakých pravdivých předpokladů a postupnými logickými úvahami z nich vyvozujeme další závěry, až se dostaneme k tvrzení, které jsme chtěli dokázat. Dalším užitečným způsobem je důkaz sporem. Pokud například chceme dokázat, že nějaké celé číslo je sudé, podíváme se, co by se stalo, kdyby bylo liché. Pokud se nám podaří ukázat, že v takovém případě dojdeme k nějaké hlouposti, tedy sporu, dokázali jsme, že liché být nemůže, a bude proto sudé.

- **Vyjádřete... / spočítejte obecně...**
  Může se stát, že po vás úloha bude chtít, abyste spočítali nějakou hodnotu, ale místo konkrétních čísel v zadání najdete jen proměnné (písmenka). V takovém případě je

vaším úkolem výsledek vyjádřit pomocí těchto proměnných (může vám tak třeba vyjít, že číslo, které hledáte, je 2a + 1). Zkuste postupovat stejně, jako byste místo s písmeny počítali s čísly (pokud vám to pomůže, klidně si úlohu prvně spočítejte pro nějaké konkrétní hodnoty; nezapomeňte ji potom ale vyřešit i obecně). Je také třeba pamatovat na to, abyste pro vyjádření použili pouze proměnné, které znáte ze zadání, a ne ty, které jste si sami zavedli.

Ve všech případech dbejte na to, aby vaše logické úvahy na sebe navazovaly a abyste je sepsali tak, že opravující váš tok myšlenek pochopí. Zejména si dejte pozor na následující:

- **Zřejmě / určitě / musí platit**
  Některé věci opravdu jsou zřejmé a není potřeba je dopodrobna vysvětlovat. Často ale v řešeních nacházíme nedokázaná tvrzení, u nichž nejsme schopni posoudit, jestli jim řešitelé opravdu rozumí a důkaz jim přijde triviální, nebo je pouze odhadli. Pokud si nejste jistí, vždy každou myšlenku radši rozepište, ať zbytečně nepřicházíte o body.

- **Známá tvrzení**
  Během řešení je povoleno používat internet i učebnice matematiky a často existují vzorečky, které vám s řešením mohou pomoci. (U komplikovanějších úloh dokonce v nápovědě odkazujeme na věty, které se pro vyřešení hodí znát.) Pokud nějakou větu nebo vzorec používáte, odkažte se na ni, ať opravující pozná, kde se daný vztah objevil. Taková tvrzení ve svých řešeních samozřejmě dokazovat nemusíte.

- **Řešte pro obecné případy**
  Pokud máte dokázat, že něco platí v trojúhelníku, je potřeba pracovat s obecným trojúhelníkem. Nestačí si nějaký trojúhelník zvolit a ověřit platnost v tomto jednom konkrétním případě, vaším úkolem je ukázat, že dané tvrzení platí vždy.

- **Důkaz rysem není důkaz**
  S důkazovými úlohami se setkáváme i v geometrii. Pracujte se shodnými trojúhelníky, dopočítávejte úhly, obsahy, hledejte podobnosti. Nestačí však úlohu narýsovat a výsledek změřit. I když se budete snažit sebevíc, rys nikdy nebude úplně přesný, a nelze ho tedy považovat za důkaz. Zejména to potom platí pro případy, kdy pracujete s nějakým obecným útvarem.

- **Nebojte se přiznat, že něco nevíte**
  Je možné, že se vám podaří vymyslet většinu důkazu, ale nějaký důležitý krok vám nepůjde dokázat. V takovém případě je naprosto v pořádku to do řešení napsat a odevzdat ho neúplné. I za část řešení můžete získat více bodů než za samotný výsledek a není žádná ostuda na některé věci nepřijít. Úlohy jsou pro základoškoláky opravdu těžké a nalezení i jen části správného řešení je velký úspěch.

- **Nezapomeňte se podepsat!**
  Díky elektronickému odevzdávání už není potřeba na každý papír vypisovat adresu, ročník nebo školu, překontrolujte si ale prosím, že vaše řešení má hlavičku s vaším jménem a číslem úlohy. Pomůže nám to při opravování a taky v případě, že své řešení omylem odevzdáte ke špatné úloze.

Pokud si něčím nebudete jistí, třeba během sepisování řešení, nebo vám nebude jasné, proč jsme vám strhli nějaké body, můžete se na nás obrátit přes e-mail a rádi vám poradíme a vše vysvětlíme :-).

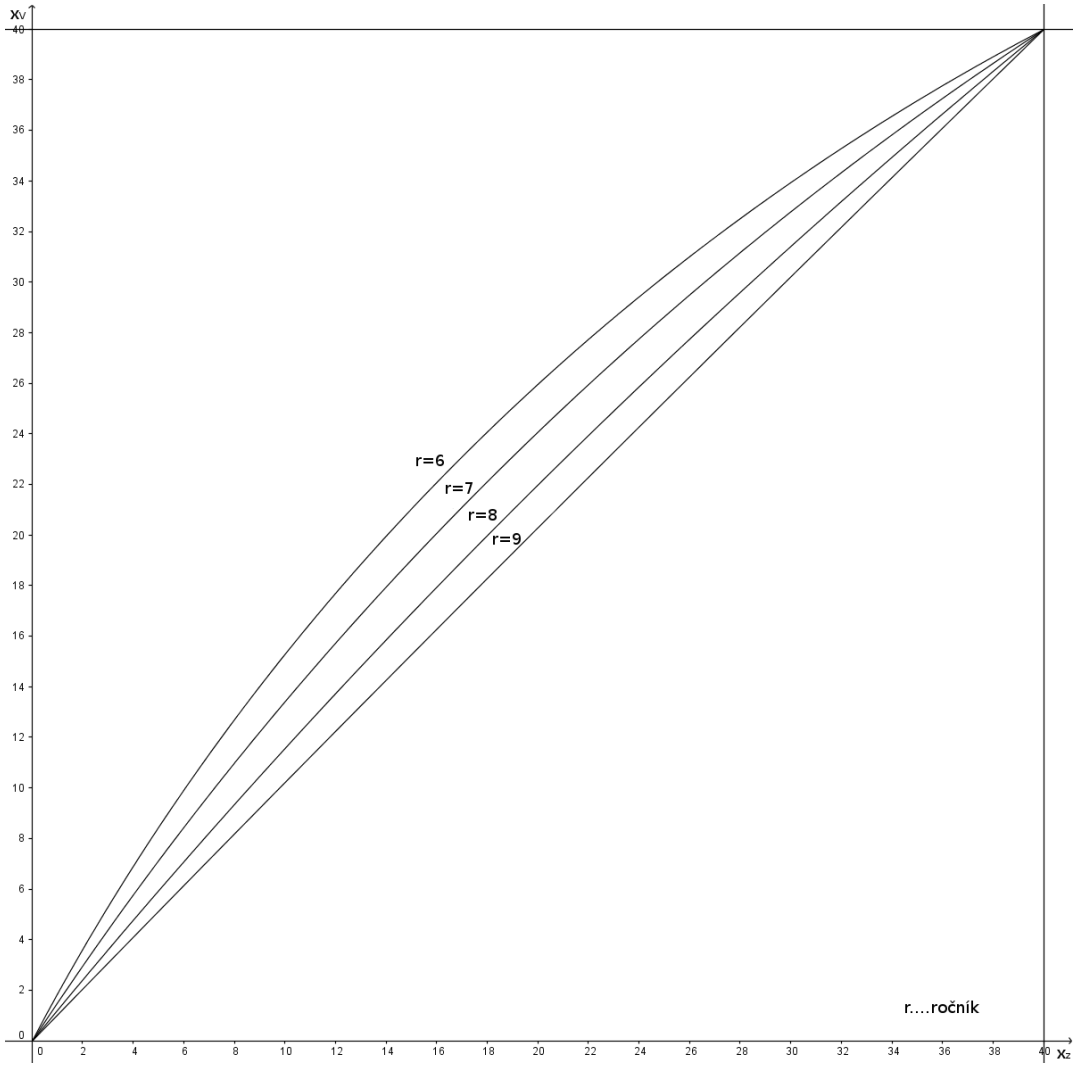
Příklady a bodování

Příklady jsou seřazeny od nejjednoduššího k nejobtížnějšímu, přičemž za 0. příklad můžete obdržet až 2 body, za 1.–5. můžete obdržet až 5 bodů, za 6. až 6 bodů a za 7. až 7 bodů. Aby nebyli žáci vyšších tříd příliš zvýhodněni, tak jsme se rozhodli body přepočítávat podle níže uvedeného vzorečku:

$$x_v = \sqrt{(m+km)^2 + (km)^2 - (x_z - m - km)^2} - km$$

kde x_v je výsledný počet bodů za sérii, x_z je součet získaných bodů za všechny úlohy a m je maximální možný počet bodů za sérii (tedy 40 bodů). k je koeficient závislý na ročníku podle následující tabulky:

Ročník	**Hodnota**
6.	1,4
7.	2,3
8.	5
9.	35



Zadání první série

Termín odevzdání: 26. října

Za sedmero horami a sedmero řekami stál fotbalový stadion. Na něm se koná již x-té mistrovství světa ve fotbale. Skupinové zápasy jsme pro nízkou atraktivitu přeskočili. Mezi hlavní favority šampionátu patří tým Antarktidy. Nejvýraznějším hráčem tohoto týmu je Slávek Uhlík, jeden z nejslavnějších fotbalistů na světě. Má uhlově černé kudrnaté vlasy a velké, taktéž uhlově černé oči. Nenosí bradku ani knírek. Je vysoký a extrémně svalnatý. Na dresu má číslo 6.

Úloha 0. *Umělecky znázorněte, jak vypadá Slávek Uhlík.*

Slávek Uhlík nehraje sám. Mezi jeho spoluhráče patří například Dušan Dusík, Ctirad Cer, Vojtěch Vodík, brankář Hugo Hafnium, Cristiano Chrom, Oliver Olovo, Lionel Lithium, Václav Vápník, Karel Křemík, zářící hvězda Jan Uran, držitel Zlatého míče Zlatomil Zlato nebo poslední nominovaný s číslem 99 Albert Einsteinium.

Trenér týmu se jmenuje Prokop Proton. Před šestnáctifinálovým zápasem proti Římanům všem hráčům objednal vodu, aby měli co pít během hydratačních přestávek. Hráči si vodu přelili do nádob.

Úloha 1. *Hráči mají 3 nádoby o objemu 8 l, 5 l a 3 l. Na začátku je 8 l nádoba plná a ostatní prázdné. Je možné získat přesně 4 l v jedné z nádob, jestliže se voda smí přelévat jen mezi nádobami a nelze ji vylévat? Přelévat se smí pouze do vyprázdnění původní nádoby nebo naplnění nové.*

Někteří hráči ale nebyli spokojeni s množstvím vody. Podvodník Vodík si pro sebe nalil celou osmilitrovou nádobu. Když si toho trenér Proton všiml, hrubě ho pokáral: „Vodíku, jak si můžeš dovolit pít víc vody než ostatní? Voda není zadarmo, musíme si ji dělit spravedlivě. Chováš se, jako bys měl v hlavě o elektron víc než já!“

Trenér jim také řekl poslední pokyny před zápasem: „Hlídejte si hráče se stejným číslem, jako máte vy. Nesmíte ho pustit z očí!“ Římané měli ovšem na dresech římská čísla, takže pokyn nebylo tak snadné dodržet.

Úloha 2. *Najděte nejmenší sudé přirozené číslo c větší než 42, které má stejný počet cifer jak v arabském, tak i v římském zápisu.*
Pozn.: Číslo 36 má v arabském zápise 2 cifry – 3, 6; v římském má ale 5 cifer – X, X, X, V, I

Hráči nastoupili na trávník a čekali, než zápas začne. Kvůli technickým potížím se ovšem toto čekání značně natáhlo. Zápas se totiž konal v noci a pořadatelé měli problém s osvětlením stadionu. Vždy, když rozsvítili jedno světlo, nějaké jiné zhaslo. Systém byl velmi komplikovaný…

Úloha 3. *Mějme v řadě čtyři světla S1 až S4. Najděte nejkratší řadu vstupů (stisknutých tlačítek), aby se rozsvítila všechna čtyři světla, pokud na začátku byla všechna zhasnutá. Světla najdete na stránce* ***komar.math.muni.cz/dfa/****. Tlačítka dělají následující:*

A) Pokud právě 2 světla svítí, to, které je více vlevo, zhasne a je-li bezprostředně vlevo od něj zhasnuté světlo, rozsvítí se.

B) Pokud S3 i S4 nesvítí, rozsvítí se S3.

C) Pokud:

- *S3 svítí, zhasne se a rozsvítí se S4.*
- *S3 nesvítí, rozsvítí se S2.*

D) Jsou-li tři světla vedle sebe ve stavu svítí-nesvítí-svítí, přepnou se do stavu svítí-svítí-svítí.

Pozn.: Aby bylo řešení úplné, musí obsahovat správnou posloupnost n vstupů, pomocí kterých rozsvítíme všechna světla, a zároveň důkaz, že méně než n vstupů nestačí.

Proton už se nemohl dívat na to, jak jsou všichni neschopní rozsvítit pár světel. Poslal tam proto Alberta, který byl ze všech hráčů nejchytřejší a který měl stejně sedět na střídačce. Tomu se po chvíli povedlo všechna světla úspěšně rozsvítit.

Rozhodčí už chtěl odpískat začátek zápasu, ale vyskytl se nový problém. Trávník nebyl posekaný do obvyklých pruhů, nýbrž do šachovnicového vzoru. Šachisté z místního klubu toho využili a teď na trávníku hráli šachy jako na obrovské šachovnici.

Úloha 4. *Kolik nejméně řádků musí mít šachovnice ve tvaru čtverce, aby do ní bylo možné vložit 2026 králů tak, aby se žádní dva navzájem neohrožovali?*

Rozhodčí přiběhl za šachisty a ukázal jim červenou kartu. Ti potom se skleslými hlavami odcházeli z trávníku. Zápas byl konečně zahájen. Uhlíkovu týmu se náramně dařilo, po pár minutách vstřelili gól. Sám Uhlík zakončoval hned v další minutě po Vápníkově centru do vápna. Římané vůbec nestíhali a míče se jim motaly pod nohama.

Pak ale nastala nepříjemná situace. Velmi těžký obránce Oliver Olovo zalehl římského útočníka Sinuse, jehož nádherně zvlněné vlasy se tím pokřivily. Jeho bratr Cosinus šel žalovat za rozhodčím, jenž udělil Římanům pokutový kop. Brankář Hafnium neměl šanci proti Sinusově střele do šibenice, takže skóre bylo 2:1. Trenér Proton zakřičel na svůj tým, hráči se vylekali a začali se víc snažit. Do konce prvního poločasu přidali ještě pár gólů. Jejich počet je roven následujícímu součtu.

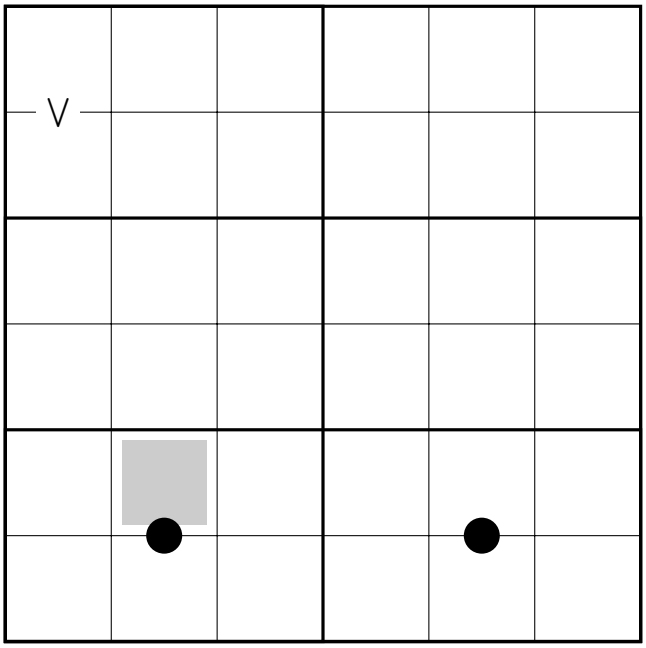
Úloha 5. *Vypočítejte součet:*

$$1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2 + 10^2 - \cdots + 2017^2 + 2018^2$$

Mezi diváky seděly i dvě fanynky týmu Antarktidy. Jejich oblíbeným hráčem nebyl nikdo jiný než Slávek Uhlík. Silně ho podporovaly a spolu s ostatními křičely jeho jméno. Když ale padlo hodně gólů, zápas je přestal bavit a začaly řešit sudoku.

Úloha 6. *Do každého sloupce, řádku a regionu vepište právě jednou čísla 1–6 podle klasických pravidel sudoku a dále dodržte tato pravidla:*

- *Noncon pravidlo: žádná dvě sousední čísla nemohou být postupky, např. v žádném ze čtyř hlavních směrů od umístěné trojky nesmí být dvojka ani čtyřka.*
- *XV pravidlo: dvě čísla, mezi kterými je znak V, mají součet 5.*
- *Kropki pravidlo: černá tečka je mezi dvěma čísly, z nichž jedno je dvojnásobkem druhého (tj. tato dvě čísla mohou být 3 a 6, 2 a 4, nebo 1 a 2).*
- *V šedém čtverci je sudé číslo.*



Pozn.: U této úlohy není potřeba uvádět postup řešení.

Uhlík a jeho tým se snažili svůj náskok uhájit. Ve fotbale ale nikdy není jasno do poslední minuty. Při zmínce poslední minuty si Albert Einsteinium uvědomil, že už měl být dávno konec. Řekl to trenérovi, který si šel stěžovat za rozhodčím. Chvíli se s ním hádal, až nakonec přišel na to, kde je problém. Minutová ručička na rozhodčího hodinkách se totiž hýbala opačným směrem.

Úloha 7. *Máme zvláštní hodiny. Hodinová a sekundová ručička se točí normálně po směru hodinových ručiček, ale minutová ručička se točí proti směru hodinových ručiček. Všechny tři ručičky se pohybují naprosto plynule, neskáčou a ukazují přesný čas. Přesně ve 12:00 jsou všechny tři ručičky na dvanáctce. Rozhodněte, zda se v průběhu následujících 12 hodin (tedy do půlnoci, ale bez ní) někdy potkají všechny tři ručičky na jednom místě.*

Když si rozhodčí uvědomil, že udělal chybu, odpískal konec zápasu. Tým Antarktidy zvítězil a hladce prošel do osmifinále.

POKRAČOVÁNÍ V PŘÍŠTÍ SÉRII